

DISPENSE DI

MECCANICA DEI

SOLIDI

DI

PIETRO

ACETI

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQ PER TRAM RET

$$\frac{dN}{ds} = -n(s) \quad \frac{dT}{ds} = -q(s) \quad \frac{dM}{ds} = T(s)$$

EQUAZ. SPORTEI

$$G = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{N \text{ sulla } r}{dA} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{P \text{ sulla } cassa}{dA}$$

CAUCHY $\lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{R}}{dA} = \underline{\underline{\sigma}}_n \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}}_n = -\underline{\underline{\sigma}}_{-n}$

3 PIANI $\rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}}_n = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}_n$

EQ INOF DI EQUILIBRIO

$$b_j + \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{con } k \in \{1, 2, 3\}$$

MUHR

$$(\underline{\underline{\sigma}} - c) + \tau^2 = R^2$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{3,3} = c \pm R$$

$$c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

$$\text{angolo } \mu = \frac{\tau}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

PRESSIONE ISOTRUPA

$$\underline{\underline{\sigma}} = p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} \quad p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{I}}$$

↑ INVARIANTE

← SFORZO DEVIATORICO \rightarrow ISOTRUPA

CINEMATICA

$\underline{\underline{\epsilon}}_L = \frac{dL}{L_0}$ $\underline{\underline{\epsilon}}_T = \frac{dD}{D_0}$ $\underline{\underline{\epsilon}} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \lambda$ ^{STRETCH}

GRADIENTE DI DEFORMAZIONE: $\underline{\underline{F}} = \frac{d\vec{s}}{d\vec{X}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \quad \leftarrow \text{STRETCHING } dx \\ \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{R}} \quad \leftarrow \text{ORTOGONALE PROPRIA (ROTAZIONE)} \end{array} \right.$ (NON RISPETTA: 1 - se deform = 0 lei na e 0 2 - DIRAZIONE del vettore)

Tensore di CAUCHY-GREEN $\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{C}}$ (NON CAMBIA CON IL VERO DI ROT) MA VALC $\underline{\underline{I}}$ SE $h \text{ def} = 0$

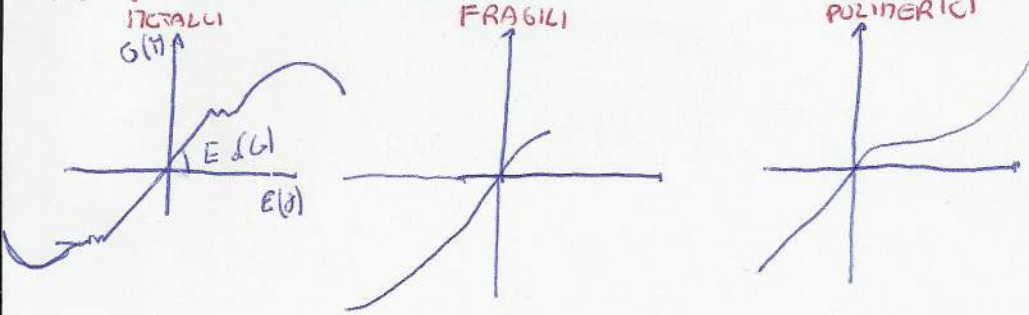
Tensore di GREEN-LAGRANGE $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$

GRADIENTE DI SPOSTAMENTO: $\underline{\underline{\psi}} = \frac{d\vec{s}}{d\vec{x}}$ $\underline{\underline{F}} = \frac{d\vec{x}}{d\vec{X}} = \frac{d\vec{X}}{d\vec{X}} + \frac{d\vec{s}}{d\vec{X}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\psi}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\psi}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\omega}} \quad \leftarrow \text{DEF. ROTAZIONE} \\ \underline{\underline{\psi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\psi}} + \underline{\underline{\psi}}^T) \quad \leftarrow \text{DEF. ANGILO} \\ \underline{\underline{\psi}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\psi}} - \underline{\underline{\psi}}^T) \end{array} \right.$

GRADIENTE DI VELOCITA' $\underline{\underline{L}} = \frac{d\underline{\underline{v}}}{dt} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\omega}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{D}} \leftarrow \text{tensore di velocita' di deformazione} \\ \underline{\underline{\omega}} \leftarrow \text{tensore di velocita' di rotazione} \end{array} \right.$

DIR PRINC DI DEF: $\det(\underline{\underline{\epsilon}} - \epsilon \underline{\underline{I}}) = 0$

LEGAME COSTRUTTIVO



$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ik}, \epsilon_{jk}, T, \rho_n)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ik}) \quad \text{ELASTICO}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ik}, \dot{\epsilon}_{ik}) \quad \text{VISCOELASTICO}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ik}, T) \quad \text{TERMOELASTICO}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ik}, \rho_n) \quad \text{ELASTOPLASTICO}$$

CREEP: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ik}, \dot{\epsilon}_{ik})$ dipende dal tempo \rightarrow continue a deformarsi

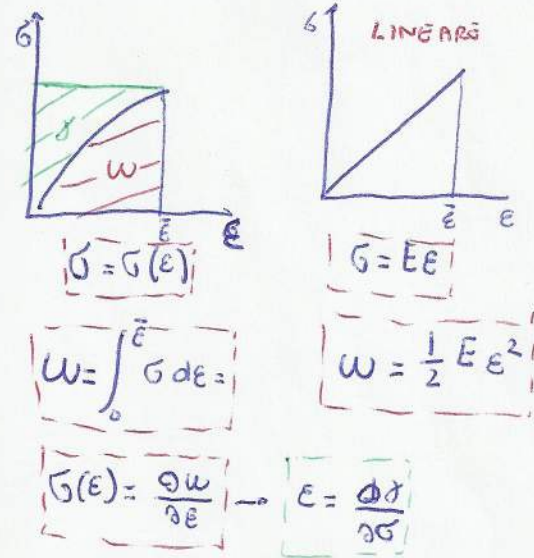


RILASSAMENTO: Le tensioni interne si riducono con il tempo

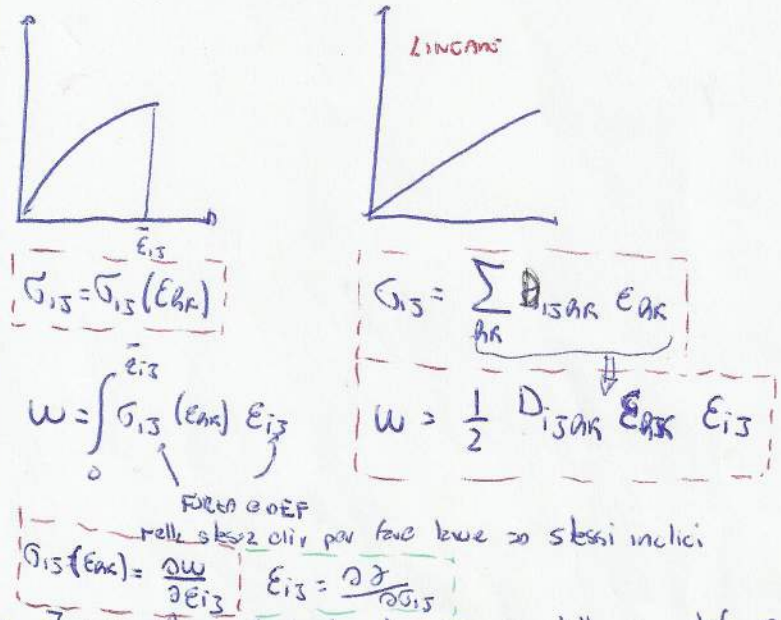
(CREEP TERMICO)

FATICA: SI ABBASSA IL G DI RESISTENZA SE SOTTOPOSTO A TANTI CICLI

CASO MONOASSIALE



CASO PLURIASSIALE



FORTE COEFF nelle stesse dir per forze lungo 2o stessi indici

$$\sigma_{ij}(\epsilon_{kl}) = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}}$$

MATERIALE IPERELASTICO: Un materiale dove $\exists W$ che dipende da σ_{ij} e dalle sue def. ϵ_{ij}

MATERIALE IPERELASTICO LINEARE

SOLO LINEARE S

IPERELASTICO LINEARE \rightarrow DCF W

$D = 36$ componenti SIMMETRICO

$W = \bar{\epsilon}$ un cliff esatto $\Rightarrow D_{ijkl} = D_{klij}$
 \Downarrow
 21 COMPONENTI

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ijs} \rightarrow D_{ijsak} \epsilon_{ak} = D_{jsiak} \epsilon_{ak}$$

$$\epsilon_{ak} = \epsilon_{ka} \rightarrow \sigma_{ij} = D_{ijsak} \epsilon_{ak} = D_{jsiak} \epsilon_{ka}$$

MATERIALE ① ISO TROPICO, ② LINEARE GOM (PKINIS SPST), LINEARE MATERIALE ③ IPERELASTICO
 $E, G, \nu = m$ tutte le dir



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \epsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} & \textcircled{2} \quad \epsilon_2 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_2 & \textcircled{3} \quad \epsilon_1 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_3 \\ \epsilon_2 &= -\frac{\nu \sigma_1}{E} & \epsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} & \epsilon_2 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_3 \\ \epsilon_3 &= -\frac{\nu \sigma_1}{E} & \epsilon_3 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_2 & \epsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3) \\ \epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad \text{INVERSO}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sqrt{E}}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 + \nu\epsilon_3] \\ \sigma_2 = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [\nu\epsilon_1 + (1-\nu)\epsilon_2 + \nu\epsilon_3] \\ \sigma_3 = \nu E [\nu\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 + (1+\nu)\epsilon_3] \end{cases} \quad \text{DIRETTO} \quad \textcircled{2}$$

PER CONVERSIONE $\sigma_{12} = 2 \epsilon_{12}$

DIRECTO	INVERSO
$\tau_{12} = \sigma_{12} G$	$\sigma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G}$
$\tau_{23} = \sigma_{23} G$	$\sigma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G}$
$\tau_{31} = \sigma_{31} G$	$\sigma_{31} = \frac{\tau_{31}}{G}$

=> NEI MATERIALI ISOTROPI LA DIR DI MAX DEFORMAZIONE PRINCIPALE E' QUELLA DI SFORTO PRINCIPALE

LEGAME TRA E, G, nu (CASO BINOMIALE) $G_3 = 0$ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \tau_1 = \tau_2$

ENERGIA ELASTICA DA PRINC

$$W = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{1}{2} \sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} \right) + \frac{1}{2} \sigma_2 \left(-\nu \frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{E} (1-\nu) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{E} (1-\nu) = \frac{\sigma^2}{2E} (1-\nu)$$

ENERGIA ELASTICA DA PRINC

$$W = \frac{1}{2} \tau \frac{\epsilon_{12}}{G} = \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma}{2G} + \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma}{2G} = \frac{\sigma^2}{2G}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{2G} = \frac{\sigma^2}{E} (1-\nu) \Rightarrow G = \frac{E}{2(1-\nu)}$$

VALORE SUO PER MATERIALI ISOTROPI ELASTICI

DEF. VOLUMETRICA IN CASO

$$V_F = (1 + \epsilon_1) dx_1 + (1 + \epsilon_2) dx_2 + (1 + \epsilon_3) dx_3 \rightarrow (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$Def = \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) V_0 - V_0}{V_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

nel materiale isotropo, lineare, elastico

>0 Pressione Volume

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{E} + 2\nu \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{E} = \frac{3\nu(1-\nu)}{E} = \frac{p}{K}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

BULK MODULUS

VALORE SUO PER MATERIALI ISOTROPI ELASTICI

LIMITAZIONI:

G, E, K > 0 Evidenze sperimentali

INER MATERIALI CLASSICI ISOTROPI VALORI:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \rightarrow 1-2\nu > 0 \quad \nu \leq \frac{1}{2}$$

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$

$\nu = \frac{\epsilon_T}{\epsilon}$ se < 0 sono materiali che tirati si espandono

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad 1-\nu > 0 \quad \nu < 1$$

materiali incompressibili $\rightarrow K = \infty$

$$\Rightarrow \frac{E}{3} < G < \frac{E}{2} \quad \text{da } \nu$$

$$\Rightarrow E_{max} = E_{vol} + E_{dev} = \frac{1}{2} pV + \frac{1}{2} (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \dots + 2\sigma_3 e_3) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{I}{3} p \\ \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\epsilon}} - \frac{I}{3} \frac{V}{E} \end{cases}$$

VERIFICHE DI RESISTENZA

Verifica puntuale di ammissibilità della legge di Hooke

$$f(\underline{\sigma}) = f_2(\underline{\bar{\sigma}})$$

GRANDEZZA INDICE DEL PERICOLO

- ① HA VALORI UGUALI PER STATI DI SFORZO UGUALITATE PERICOLI
- ② f_2 LIMITE IN CONDIZIONI NOTE
- ③ f viene scelta sulla basse del materiale e solo su questa base

CRITERI DI ROTTURA
FRAGILI → **GALEO GALILEO**

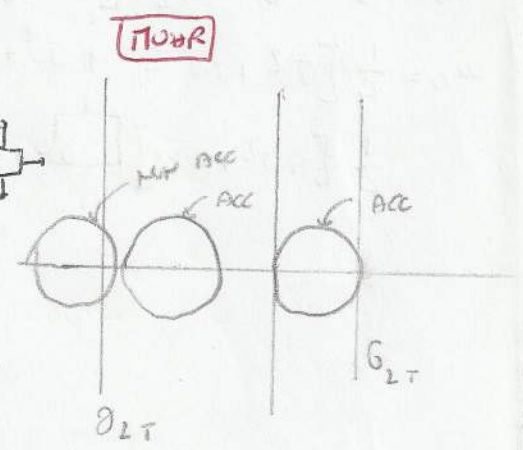
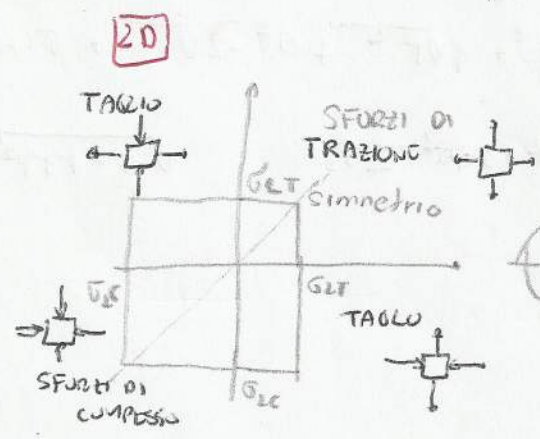
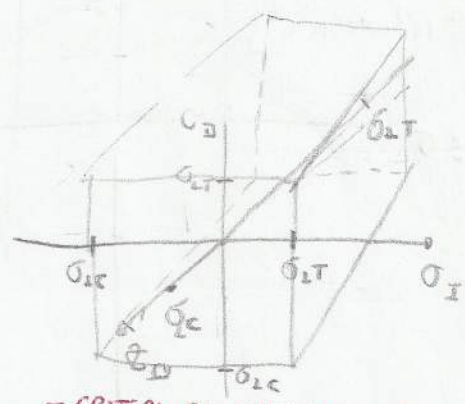
$\underline{\sigma}$ → RICAMO $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

$$\begin{cases} \sigma_{max} < \sigma_{L TRAZIONE} \\ \sigma_{min} > \sigma_{L COMPRESSIVE} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{LC} \leq \sigma_I \leq \sigma_{LT} \\ \sigma_{LC} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_{LT} \\ \sigma_{LC} \leq \sigma_{III} \leq \sigma_{LT} \end{cases}$$

6 DISUGUALIANZE per simmetrie $\underline{\sigma}$ devono essere tutte vere.

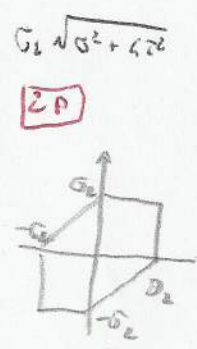
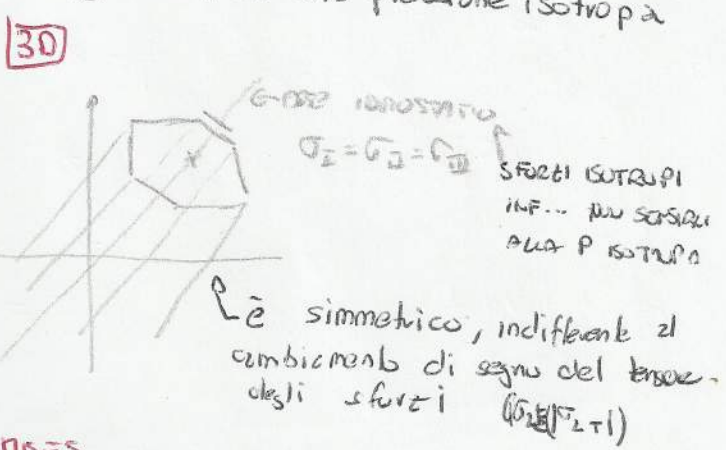
3P → L'ORIGINE è sempre compressa (sforzo nullo)



CRITERI DI SNERVAMENTO
DUTTI → **BAGNO DI TRASCIA PIU' PRECISO**

- ① più sensibili al taglio
- ② insensibili alla pressione isotropa

come controllo prende il massimo sforzo TANGENZIALE



$$\tau_{max} \leq \tau_L$$

RAGGIO MAX DELL'ARBELO

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

$$\begin{cases} -\sigma_L \leq \sigma_I - \sigma_{II} \leq \sigma_L \\ -\sigma_L \leq \sigma_{II} - \sigma_{III} \leq \sigma_L \\ -\sigma_L \leq \sigma_{III} - \sigma_I \leq \sigma_L \end{cases}$$

NB $\tau_L = \frac{\sigma_L}{2}$ CASO ARMO

6 DISUGUALIANZE

PIRES → MATERIALI DUTTI IPERELASTICI (SCALARE = CUNTO)

$$\underline{\underline{\sigma}} = p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\epsilon}}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{E_1 + 2E_2}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{\nu}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\epsilon}} \Rightarrow W = \frac{1}{2} p \nu + \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}}$$

$$W_{DEV} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} - p \underline{\underline{I}}) : (\underline{\underline{\epsilon}} - \frac{\nu}{3} \underline{\underline{I}}) \leq W_{DEV,L}$$

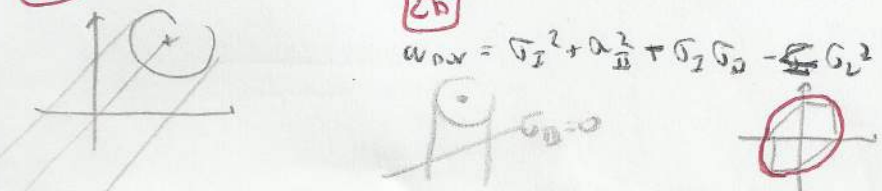
Energie volumetriche

E elvistorica

Non si associa ai cambiamenti di volume

3P

$$\frac{1}{64} (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I \sigma_{II} - \sigma_{II} \sigma_{III} - \sigma_{III} \sigma_I) \leq \frac{1}{64} \frac{\sigma_L^2}{6} = \frac{\sigma_L^2}{384}$$



TRAVI

$$\begin{bmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2} \left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$$

TRUESCA → SI SIANO τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] - \frac{1}{2} \left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{TRUESCA} = 2 \tau_{max} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_2$$

RISES

$$W_D = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} \leq \sigma_2^2$$

$$W_D = \frac{1}{4} \left[\sigma^2 + 2\sqrt{\dots} + \sigma^2 + 4\tau^2 + \sigma^2 - 2\sqrt{\dots} + \sigma^2 + 4\tau^2 + \sigma^2 - 2\sqrt{\dots} + \sigma^2 + 4\tau^2 + \sigma^2 - 2\sqrt{\dots} \right]$$

$$\frac{1}{4} [4\sigma^2 + 12\tau^2] = \sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_2^2 \quad \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_2$$

SOLIDO DI DE SAINT-VENANT I_u e I_v

IPOTESI Geometriche: $l \geq 10D$ $I_y = 0$ $x, y, z =$ destrorso $z =$ sez ampatta

" CARICO: NO VINCOLI, NO FORZAMENTO, NO F SUP LAT, \rightarrow solo carichi distribuiti sulle basi equilibrate

" MATERIE: ELASTICO, ISOTROPO, OMOGENEO, LINEARE (piccoli spostamenti, HOOKE)

POSTULATO: A UNA DISTANZA DELLE BASI PARI ALLA MASSIMA DIMENSIONE TRASVERSALE NON HA IMPORTANZA LA DISTRIBUZIONE MA SOLO LA RISULTANTE DEI CARICHI

AZIONE ASSIALE



$$\sigma_z = \frac{N}{A} \quad \epsilon_z = \frac{N}{A} \frac{1}{E}$$

LE RICHIAMO $\rho \rho$ **CUNGIURA** $\epsilon_z = \frac{\rho}{r}$ **LEGGE** $\sigma_z = E \epsilon_z$ **EQUILIBRO** $N = \int_A \sigma_z dA$
 $N = \int_A E \epsilon_z dA = E \epsilon_z A$
 $\epsilon_z = \frac{N}{EA} \Rightarrow \rho = \frac{N}{EA}$

MOMENTO FLETTENTE



$$L = \theta (y + \eta)$$

$$\epsilon_z = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\theta y + \theta \eta - \theta y}{\rho y} = \frac{\eta}{\rho y} \quad \text{CUNGIURA}$$

LEGGE $\sigma_z = E \epsilon_z = E \frac{\eta}{\rho y}$

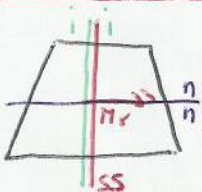
EQUILIBRO $\left\{ \begin{aligned} N = 0 &= \int_A \sigma_z dA \\ M_x = \int_A \sigma_z y dA \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{E}{\rho} \int_A \eta dA = 0 &\Rightarrow \eta = y \text{ asse baricentrico in } y \\ M_x = \int_A \frac{E}{\rho} \eta^2 y dA = \frac{E}{\rho} I_x &\rightarrow \rho = \frac{EI_x}{M_x} \end{aligned} \right.$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{M_x}{EI_x} y \\ \sigma_z &= \frac{M_x}{I_x} y \\ \rho &= \frac{EI_x}{M_x} = \chi = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \end{aligned} \right.$$

MOMENTO FLETTENTE Y

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{M_y}{I_y} x \\ \epsilon_z &= -\frac{M_y}{I_y E} x \\ \rho_y &= \frac{EI_y}{M_y} \end{aligned} \right.$$

ASSI PARTICOLARI



SS = piano di simmetria $\perp M$
 nn = asse neutro
 yy = asse di inflessione $\perp M$ \rightarrow dir di massime crescita

FLESSIONE DEVIATA

LINEARITA' GEOM + LINEARITA' MATERIALE = SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



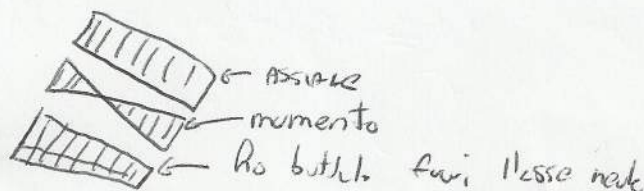
$$\left\{ \begin{aligned} M_x &= M \cos \alpha \\ M_y &= M \sin \alpha \end{aligned} \right.$$

distanza dai nuovi assi principali d'inertia

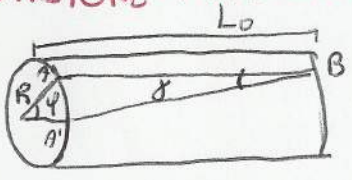
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} v + \frac{M_y}{I_y} w$$

$$\sigma_z = 0 \quad y = \frac{I_x}{I_y} \frac{M_y}{M_x} = \frac{I_x}{I_y} \tan \alpha \tan \beta x$$

LA POSIZIONE FLESSIONATA FA SPUNTARE l'asse neutro che non passa più del baricentro
 se predominanza flessione \rightarrow asse neutro è tale compressione o trazione, l'asse neutro è fuori della trave



TORSIONE - PROFILI CIRCOLARI

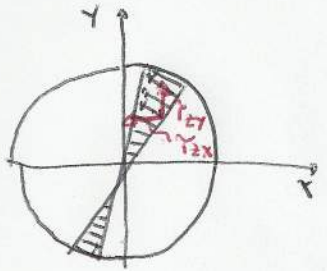


$\overline{AB} = R\varphi = L_0\gamma = \boxed{\gamma = \frac{R}{L_0}\varphi}$ → vale per ogni $r < R$

$\gamma(r) = \frac{r}{L_0}\varphi$

Dalla legge di Hooke → $\tau = \gamma G \Rightarrow \tau(r) = \frac{G\varphi}{L_0} r$

RICORDA: γ = angolo di rot. sezione
 r = raggio della sez.
 L = lunghezza trave



$$M_T = \int_A \tau(r) r dA = \int_A \frac{G\varphi}{L_0} r^2 dA = \frac{G\varphi}{L_0} \int_A r^2 dA$$

$$= \frac{G\varphi}{L_0} \int_A (x^2 + y^2) dA = \frac{G\varphi}{L_0} \left(\int x^2 dA + \int y^2 dA \right) = \frac{G\varphi}{L_0} I_G$$

$I_x + I_y = I_G$

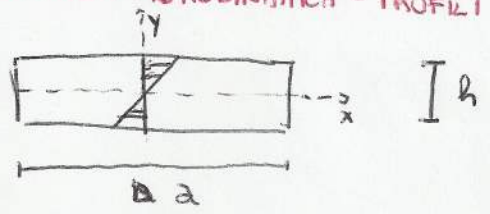
RICORDA

$M_T = \frac{G\varphi}{L_0} I_G$

→ $\gamma(r) \Rightarrow \frac{G I_G}{L_0} \frac{L_0 \gamma(r)}{r} = M_T \Rightarrow \gamma(r) = \frac{M_T}{G I_G} r$

RICORDA HOOKE: $\tau = \frac{M_T}{I_G} r$
 INVERSA: $\varphi = \frac{M_T L_0}{G I_G}$

ANALOGIA IDRODINAMICA - PROFILI RETTANGOLARI



DEFINISCO RIGIDEZZA TORSIONALE

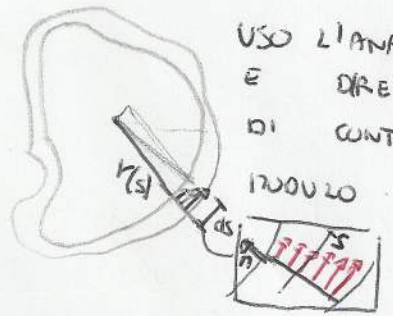
$J_T = \frac{1}{3} \sum a_i^3$ (spessore)

$\tau_{zx}(a/2) = \frac{2 M_T}{I_G} \frac{h}{2}$

$\tau_{zx}(y) = \frac{2 M_T}{I_G} y$

come per profili cilindrici ma vale il doppio

FORMULA DI BREDI - PROFILI CHIUSI IN PARETE SOTTILE



USO L'ANALOGIA IDRODINAMICA, PUCHE' E' SOTTILE POSSO PRENDERE TUTTE LE T PARALLELE E DIRETTE COME LA VELOCITA' DEL FLUIDO, PER LE EQUAZIONI DI CONTINUITA' DEL FLUIDO, IL FLUSSO DI T CAMBIA DIREZIONE MA NON

INDUOLLO $q(s) = \bar{q} \rightarrow dF = \bar{q} ds$

$dM_T = \bar{q} ds r(s) \Rightarrow M_T = \bar{q} \int r(s) ds$

$M_T = 2 \bar{q} Q \Rightarrow \bar{q} = \frac{M_T}{2Q}$

$\tau_{med} = \frac{M_T}{2Q t}$

2 volte AREA SOCCUSA DAL PERIM. $dA = \frac{1}{2} r ds$

CONFRONTO TRA PROFILI SOTTILI CHIUSI E A PERI

O $\bar{\tau} = \frac{M_T}{2Q t} = \frac{M_T}{2\pi R^2 t}$

C $\tau = \frac{M_T}{S_T} t = \frac{3 M_T}{2\pi R t^2} t$

$\Rightarrow \frac{C}{O} = \left[\frac{3 \pi R^2 t}{2\pi R^2 t} \right]^{-1} = \frac{3R}{t} \approx 15$

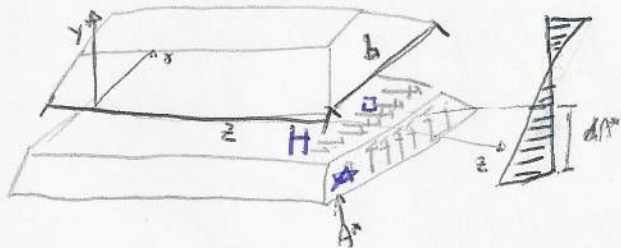
LE SCE CHIUSE POSSONO DI PIU'

TAGLIO → POSSO STUDIARE SOLO:

- a) SEZIONI CON ASSE DI SIMMETRIA CARICATE SIMMETRICAMENTE LUNGO L'ASSE
- b) PROFILI SOTTILI CON TAGLIO // ASSE PRINCIPALE D'INERZIA



a) Divide il solido in 2 parti con una corda // all'asse neutro del momento flettente associato



★ CREA \square che devono essere equilibrate dai σ_z dovuti al momento flettente associato

$$H = R$$

$$H = T_y z b z$$

$$R = \int_{A^*} \sigma_z dA^* = \int_{A^*} \frac{T_y}{I_x} z \gamma dA^*$$

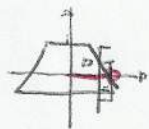
$$= \frac{T_y z}{I_x} \int_{A^*} \gamma dA^* = \frac{T_y z}{I_x} S_x^*$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{T_y}{I_x} z y$$

$$H = R \rightarrow T_y z b z = \frac{T_y}{I_x} z S_x^*$$

$$\frac{T_y z}{I_x} = \frac{T_y}{I_x} \frac{S_x^*}{b}$$

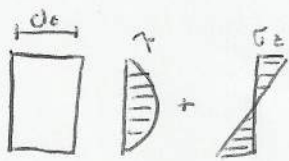
APPROSSIMAZIONE SEMPRE PIÙ PRECISA VIA VIA LA SEZIONE È PIÙ COMPATTA E PIÙ SIMMETRICA



$$\tau_{zx} \approx \tau_{zx} = \frac{T_y}{I_x} \frac{S_x^*}{b}$$



DEFORMAZIONI



= ANGOLI RETTI + DEF = INGOMBRIATO



← SEZIONE

b) PARETE SOTTILE E MOMENTO TORRENTE PARASSITA



$$R_1 = \int_0^b \frac{T_y}{I_x} \frac{S_x^*}{b} ds =$$

$$M_{Tost} = \Pi_{TINT} = R_1 H + T_y x_G$$

$$T_y x_0 = R_1 H + T_y x_G$$

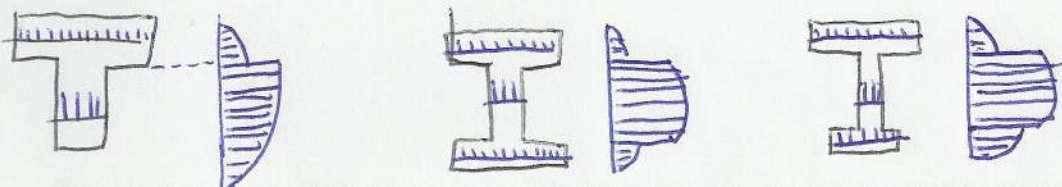
$$x_0 = \frac{R_1}{T_y} H + x_G$$

centro di taglio
POSIZIONE CHE DEVE OCCUPARE IL TAGLIO PER UN CORNO UN Π_T PARASSITA

DEVO SOMMARE I RISULTATI:



SOURAWSKI e SOURAWKI

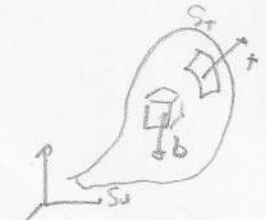


PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI SUL CONTINUO

• Un campo di sforzi σ_{KS}^E si dice staticamente ammissibile se vale:

RISPETTO A
L'EQUILIBRIO

$$b_j + \frac{\partial \sigma_{KS}^E}{\partial x_k} = 0 \quad \text{nel } V \quad t_j = \sigma_{KS}^E n_j \quad \text{sul } S_f$$



• Un campo di spostamenti (sono incrementi se fuori dai piccoli spostamenti) si dice cinematicamente ammissibile se vale:

RISPETTO A

CONGRUENZA $\epsilon_{ij}^C = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i^C}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j^C}{\partial x_i} \right)$ in V $S_j^C = 0$ su S_u

Questi due campi non sono collegati da una legge ~~A~~ un legame costitutivo però deve valere il lavoro virtuale.

$$L_c = \int_V b_j s_j^C dV + \int_{S_f} t_j s_j^C ds$$

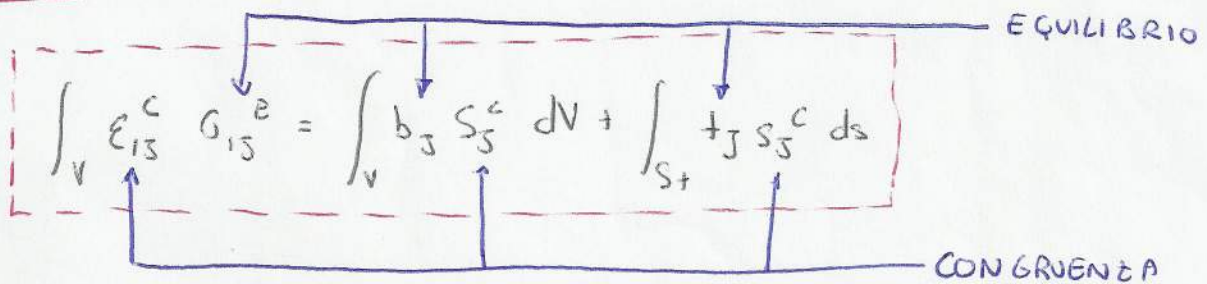
$$\int_V b_j s_j^C dV + \int_{S_f} \sigma_{KS}^E s_j^C n_j ds \rightarrow \text{TH ON} = \int_V b_j s_j^C dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij}^E s_j^C) dV$$

$$= \int_V b_j s_j^C + \int_V \frac{\partial (\sigma_{ij}^E)}{\partial x_i} s_j^C + \int_V \frac{\partial (s_j^C)}{\partial x_i} \sigma_{ij}^E = \int_V \epsilon_{ij}^C \sigma_{ij}^E + \int_V w_{ij}^C \sigma_{ij}^E dN$$

$\underline{S} = \underline{W} + \underline{E}$

$\stackrel{=0}{=} \text{ per equilibrio}$

$$L_1 = \int_V \epsilon_{ij}^C \sigma_{ij}^E$$



VALIDITÀ:

- PER TUTTI I MATERIALI
- INDIPENDENTE DAGLI SPOSTAMENTI REALI → IN QUESTO CASO LE DEFORMAZIONI VIRTUALI CONSIDERATE DEVONO PARTIRE DALLA CONFIGURAZIONE DEFORMATA
- PU' ESSERE UN PODO PER IMPONERE L'EQUILIBRIO IN FORMA DEBILE (MA VIRTUALE)

- 1 EQUILIBRIO + CONGRUENZA = PLV
- 2 EQUILIBRIO + PLV = CONGRUENZA
- 3 CONGRUENZA + PLV = EQUILIBRIO (DEBILE)

PRINCIPIO LAVORI VIRTUALI PER TRAVI RETTILINEE

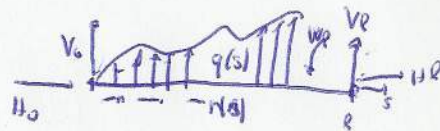
- NON È RICHIESTA CAUSA-EFFETTO TRA SFORZI E DCF
- IN TERMINI INCREMENTALI PUÒ STUDIARE SIST. FINITI

CARICHI

I carichi distribuiti $q(s); n(s)$ sono le corrispettive delle forze di volume nel continuo

I carichi N, T, M sono i corrispettivi t_3 del continuo

CONDIZIONI AL CONTORNO: \rightarrow $N(l) = H_0$ $M(l) = W_0$ $T(l) = T_0$
 $N(0) = H_0$ $M(0) = -W_0$ $T(0) = T_0$



SPOSTAMENTI: SI IPOTIZZA CHE LA TRAVE DEFORMI LA PROPRIA LINEA D'ASSE, MA LE SEZ. RIMANGANO PERPENDICOLARI AD ESSI

$\epsilon_n = \frac{N}{EA}$

$\chi = \frac{M}{EI}$

$\frac{I}{A^2 B} = \frac{T}{A^2 B}$
 ↳ per ingobbamento

⇒ SIAMO NEL PIANO 3DGL u^c, v^c, ψ

SPOST. ESTERNI: u^c, v^c, ψ
 SPOSTAMENTI INTERNI: $\epsilon_n^c, \chi^c, t^c$

CINEMATICA CONGRUENTE FORZE INTERNE

STATICA EQUILIBRATA

⇒ $n(s); q(s); H_0, V_0, W_0, H_l, V_l, W_l$ generano sezioni interne di equilibrio

N^c, T^c, M^c

PDV GENERALE

$L^{est} = \int_0^l [n(s) u^c(s) + q(s) v^c(s)] ds + U_R^c H_0 + V_R^c T_0 + W_R^c W_0 + U_0^c H_l + V_0^c T_l + W_0^c W_l$

$L^{int} = \int_0^l [N^c(s) \epsilon_n^c(s) + T^c(s) t^c(s) + M^c(s) \chi^c(s)] ds$

PDV PER DCF ELASTICHE

• DURANTE LE DEFORMAZIONI GENERALI DOVUTI AGLI SFORZI ESTERNI CHE OLTRE A ESSERE CONGRUENTI SONO COLLEGATI ALLE AZIONI INTERNE → CINEMATICA CONGRUENTE E STATICA EQUILIBRATA

$L^{int} = \int_0^l N^c \frac{N^c}{EA} + T^c \frac{T^c}{A^2 B} + M^c \frac{M^c}{EI} =$ il lavoro forze interne (le forze interne non fanno lavoro spostabili)

• TRAVE SNELLA → Se la trave è snella le deformazioni imposte solo il momento flettente

$L^{int} = \int_0^l M^c \chi^c = L^{est} \left[\int_0^l q v^c + H_0 u_0^c + V_0 u_0^c + W_0 \psi_0^c + H_l u_l^c + V_l u_l^c + W_l \psi_l^c \right]$

$\chi^c = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta T}{h}$

STRUTTURE IPERSTATICHE → IN VALGO DI LINEARITÀ DEI MATERIALI = SURAPP. EFFETTI

- STRUTTURA PRINCIPALMENTE STATICA → AZIONI INTERNE E REAZIONI VINCOLARI
- " DI SERVIZIO → STATICA EQUIVALENTE
- " VERA → DEFORMAZIONI AMPLIFICATE - CINEMATICA CONGRUENTE

$\int \Pi_1 \left(\frac{\Pi_0 + \chi \Pi_1}{EI} + \chi_T \right) = 0$

DEFORMAZIONI TERMICHE

ASSIALE ΔT → DCF SENZA SFORZI

$\alpha \frac{(\Delta T_1 + \Delta T_2)}{2} = \epsilon_{TANICA}^{BARI}$

$\epsilon_T^{sup} = \frac{\alpha \Delta T_{sup}}{h} = \alpha \Delta T$

$\epsilon_T^{inf} = \alpha \Delta T_{inf}$

CURVATURA

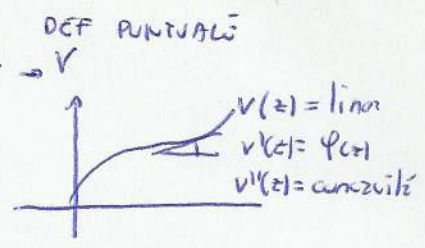
$\chi_T = \frac{\alpha (\Delta T_1 - \Delta T_2)}{h}$

FORZE ESTERNE → STATICA AMMISSIBILE
 SPOSTAMENTI → CINEMATICA AMMISSIBILE } L^{est}
 AZIONI INTERNE EQUILIBRATE } L^{int}
 SPOSTAMENTI CONGRUENTI } L^{int}

LINEA ELASTICA

È LA FUNDA ASSUNTA DALLA TRAVE, SI TRASCURANO N E $T \rightarrow V$

$$X_S \neq X_T = X_{ANALITICA} \Rightarrow \frac{M(z)}{EI} + \frac{\alpha \Delta T}{h} = v''(z)$$



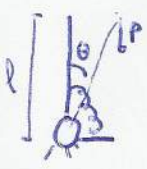
$$\begin{cases} v''(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_T & \rightarrow \text{CONCAVITÀ} \\ v'(z) = \int_0^z \frac{1}{EI} M(s) ds + \chi_T z + C_1 & \rightarrow \text{ROTAZIONI} \\ v(z) = \int_0^+ \int_0^z \frac{1}{EI} M(s) ds dt + \frac{1}{2} \chi_T z^2 + C_1 z + C_2 & \rightarrow \text{DEF} \end{cases}$$

EQUILIBRIO

- + STABILE: perturbando il mio sistema si crea un'azione che lo riporta allo stato iniziale
- + INSTABILE: " " " " scatenano un insieme di forze che incrementa gli effetti delle mie perturbazioni
- + INDIFFERENTE: perturbando il mio sistema questo si trova in una nuova posizione di equilibrio

P_c STRUTTURE IDRODINAMICHE

↑ CARICO CRITICO = CARICO ASSIALE DI COMPRESSIONE CHE FA INSORGERE LEY ~~INSTABILI~~ INDIFF



θ piccolo \rightarrow ipotesi piccoli spostamenti [NB non è completa \rightarrow eq nelle conf. deformate]

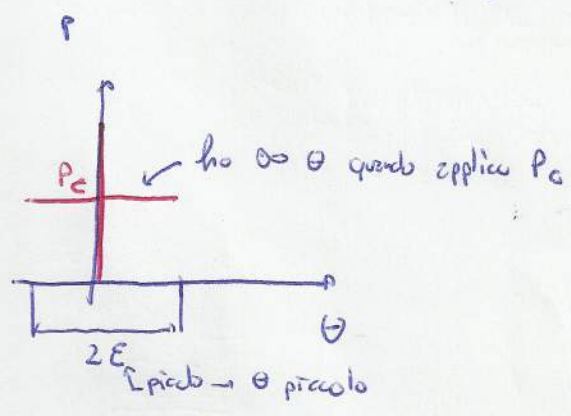
$$\Pi_{STA} = K\theta \quad \Pi_{INT} = P l \sin \theta \quad \text{Se } \Pi_{STA} = \Pi_{INT} \Rightarrow \text{EQUILIBRIO}$$

$$K\theta = P l \sin \theta \quad \theta = \frac{P l \sin \theta}{K} \rightarrow \theta \text{ piccolo } \approx \sin \theta$$

$$\theta \left(1 - \frac{P l}{K} \right) = 0$$

Ho equilibrio se $\theta = 0 \rightarrow$ verticale - n barre

$\theta \neq 0 \rightarrow P = \frac{K}{l} \forall \theta$ piccolo \rightarrow Ho un ventaglio di sol eq. indifferente



CARICO CRITICO TRAM DEF

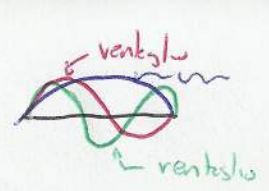
$$P_K = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

$k = 0, 1, \dots, n$

$k=0 \rightarrow$ non ha carico

$$v_1(z) = A \sin \frac{\pi}{2l} z$$

DEFORMATA CRITICA

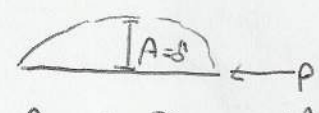
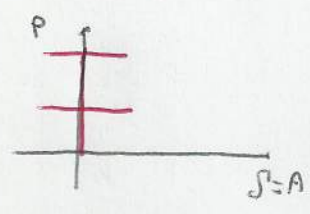


0
1
2
3

DEFINISCO l_0 - LUNGHEZZA DI LIBERA INFISSIONE

sembrare def critica
Distanza tra due punti di flesso

$$P_K = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_0^2}$$



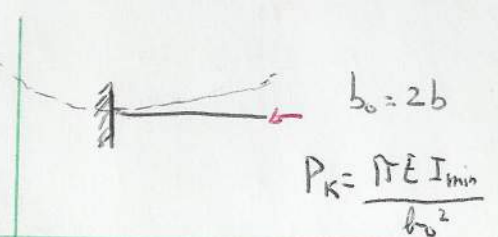
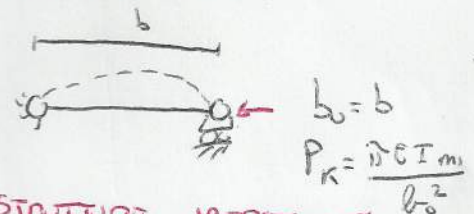
$$A = \sin \frac{\pi}{2} z \neq 0$$

$A=0$
 $\sin \frac{\pi}{2} z = 0 \Rightarrow P_{KR}$

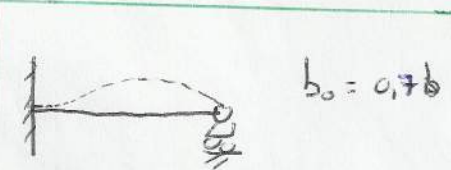
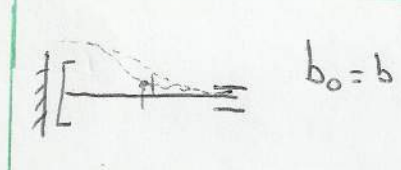
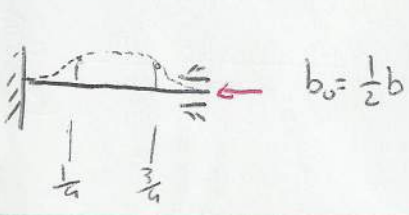
Se $A=0$ allora P_{KR}

Se $P=P_{KR}$ allora A è piccolo

STRUTTURE ISOSTATICHE



STRUTTURE IPERSTATICHE



CARICO CRITICO

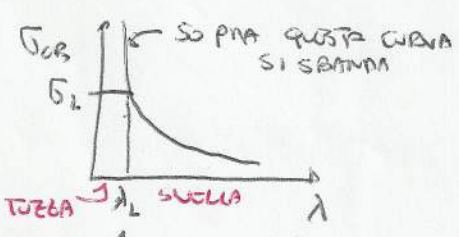
$$P_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_0^2} \frac{I_{min}}{A}$$

$\rho_{min}^2 \rightarrow$ RAGGIO CIRCOLARE D'INERZIA²

$$\rightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

SNELLITÀ

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}} \text{ SNELLITÀ}$$



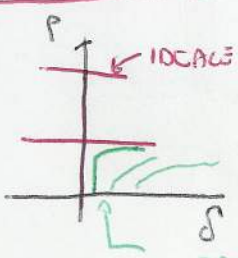
+ snella minore è il carico per il quale c'è pericolo di snello

lambda piccoli non ha instabilità perché scoppia prima

$$\lambda_L = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_L}}$$

DEF CHE DIPENDE DALLA CLASSE E DAL MATERIALE

TRAVE REALE



PUNTO GIÀ DEFORMATO

L mi verso l'altro da P_K1